2) pour k ≥ 1 on a : $U_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$: somme de n termes d'une suites géométrique

De raison $\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2 \Rightarrow S_n \leq 2$ car $U_0 = 0$

b) $S_{n+1} - S_n = = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$

(S_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

EXERCICE№11

$a > 0$, $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$

1) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$

2) pour n ≥ 2

$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2} \Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

3) $0 < q < 1$

a) $\frac{1}{q} > 1$ d'où il existe un réel $a > 0$ tel que $\frac{1}{q} = 1 + a$

par suite $q = \frac{1}{1+a}$

b) $x_n = x_0.q^n$; $|x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0|\, b_n$

$\lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$ d'après 2)

Par suite $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$

4) – a) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$

b) la suite $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 0$

c) $U_n = n.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

soit $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$, par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$